Chapter 4. 상태변수모델state space model

■ 4.1 상태변수모델state space model

상태변수모델이란 어떠한 시스템을 수치적으로 표현함에 있어서 그 시스템을 가장 잘 나타낼 수 있는 상태state들을 선정하여, 이러한 상태들의 상호 연관성을 가감승제 및 미분 등의 기타 수학적인 관계식으로 시스템을 표현한 모델을 말한다.

➲ 시스템의 상태state란? : 시스템의 역학을 나타내는 식에서, 앞으로의 변화 및 출력에 대한 정보를 알려줄 수 있는 변수들의 집합.

예를 들어서, 온도와 습도에 따라서 바람의 방향과 세기가 변화하는 골짜기가 있을 때, 온도와 습도를 상태변수로 잡으면, 바람의 방향과 세기를 표현하는 데 있어서 매우 유용하며, 더 나아가 그 골짜기에 내가 원하는 바람의 방향과 세기를 만들려면 상태변수, 즉 온도와 습도를 어떻게 만들어야 하는지도 역으로 알 수 있을 것이다. 따라서 상태변수는 그 시스템을 잘 표현할 수 있는 가장 중요한 지표가 되며, 어떤 물리적인 변수를 상태변수로 잡아야 하는지 아는 것도 그 시스템을 이해하는 데 매우 중요한 일이 된다.

➲ 상태변수 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ → 현재의 값과 입력 신호를 알면 해당 시스템의 미래의 행동(출력)을 결정할 수 있는 변수들

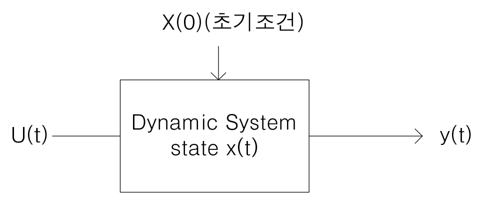

그림 4.1.1 시스템의 입력과 출력

이러한 상태변수를 활용한 시스템 모델은 컴퓨터를 활용한 해를 구하기가 용이하며, 비선형, 시변시스템time-varying system, 다변수시스템multivariable system 등 넓은 영역에 사용 가능하다 일반적으로 어떤 시스템을 표현할 때 시간에 대한 미분/적분이 사용되는 경우가 매우 많은데 상태 변수 모델은, n차 상미분방정식을 여러 개의 1차 미분방정식으로 분해 하여 나타낼 수 있기 때문에 시스템을 분석적으로 활용하는 데에도 매우 편리하다.

➲ $F = m\ddot{x} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{F}{m} \end{Bmatrix}$ 2개의 1차 미분방정식으로 쪼개서 표현이 가능하다.

■ 4.2 질량-스프링-댐퍼 시스템의 상태변수 모델링

(Example 4.2.1)

기초 물리학에서 가장 많이 사용되는 질량-스프링-댐퍼 시스템을 상태변수 모델을 사용하여 모델링해 보자.

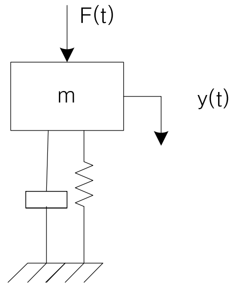

그림 4.2.1 질량-스프링-댐퍼 시스템

그림 4.2.1의 질량, 스프링, 댐퍼로 이루어진 시스템은 각각 그 요소 관계식이, 관성력 $F = ma = m\ddot{y}$, 스프링의 힘-거리 관계식 $F = ky$ 그리고 댐핑 관계식 $F = c\dot{y}$ 로 정의된다는 것을 알고 있으므로, 선형시스템이라는 가정을 도입하면, 힘 입력 $F(t)$ 를 가했을 때 질량 m 인 물체의 변위 y 는 위 세가지 식의 합인 다음과 같이 정의된다.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F(t) \tag{4.2.1}$$

이 때 상태변수 x_1, x_2 를 다음과 같이 정의하면 식(4.2.1)은 식(4.2.3)과 같이 표기된다.

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

$$m\frac{dx_2}{dt} + cx_2 + kx_1 = F(t) \tag{4.2.3}$$

이를 상태변수 모델링의 표준 폼form으로 표기하면,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{c}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{1}{m}F \end{cases} \tag{4.2.4}$$

여기서 벡터 $\mathbf{x}$ 을 다음과 같이 정의하면 식(4.2.4)는 다음과 같은 상태변수 모델링 기본형으로 표현 가능하다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4.2.5}$$

$$\therefore \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}F$$

➲ 상태변수 모델의 기본형

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

(Example 4.2.2)

이번에는 간단한 전기시스템인 커패시터-코일-저항으로 이루어진 시스템을 해석해 보자.

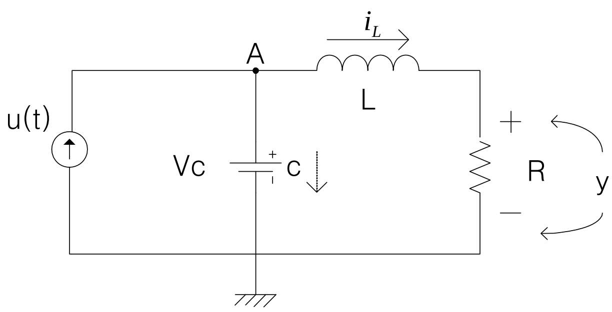

그림 4.2.2 커패시터-코일-저항 시스템

저항의 방정식 $V = iR$, 커패시터의 방정식 $i = C\dfrac{dV}{dt}$, 코일의 방정식 $V = L\dfrac{di}{dt}$ 를 알면 키르호프Kirchhoff의 전압법칙Voltage Law 및 전류법칙Current Law을 사용하여 다음과 같은 시스템의 방정식을 도출해 낼 수 있다.

$$\begin{cases} C\dfrac{dV_C}{dt} = u(t) - i_L \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -Ri_L + V_C \end{cases} \tag{4.2.7}$$

커패시터와 코일은 저항과는 달리 에너지를 저장할 수 있기 때문에, 상기 회로에 저장된 에너지는 다음과 같이 표기 가능하다.

$$E = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2} C V_C^2 \tag{4.2.8}$$

시스템의 방정식 (4.2.7)은 각각, node A에서의 키르호프의 전류법칙(KCL) 및 회로의 오른쪽 루프에서의 전압법칙(KVL)을 적용한 것이다. 여기서 상태변수를 커패시터에 걸리는 전압 V_C 와 코일에 흐르는 전류 i_L 로 설정하면 시스템 방정식 (4.2.7)은 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{C} u(t) - \dfrac{1}{C} x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{R}{L} x_2 + \dfrac{1}{L} x_1 \end{cases} \tag{4.2.10}$$

$$\therefore \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{4.2.11}$$

$$y = R i_L = R x_2 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{4.2.12}$$

상기의 두 가지 예제를 비교하면 예제 4.2.1에서는 상태변수 x_1, x_2 가 단순히 미분관계임에 비해 예제 4.2.2에서는 두 개의 별도의 미분방정식을 가지는 V_C 와 i_L 로 되어 있는 것을 알 수 있다. 상태변수의 선정은 해당 시스템을 가장 잘 표현 하는 변수로 구성하여야 하며, 여러 가지 다양한 선택의 조합이 있을 수 있다. 특히 미분방정식이 여러 가지로 구해질 수 있는 경우는 다양한 변수를 상태변수로 선정하는 것이 가능하며, 상태변수의 선정은 모델링하는 사람의 관심에 따라서도 달라질 수 있다.

■ 4.3 상태 미분 방정식과 라플라스Laplace 변환과의 관계

$$\dot{\mathbf{x}} = a\mathbf{x} + b\mathbf{u} \tag{4.3.1}$$

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \tag{4.3.2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}x(0) + \frac{b}{s-a}U(s) \tag{4.3.3}$$

식 (3.3.3)에 Inverse Laplace transform을 취하면,

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{4.3.4}$$

cf) convolution: $Y(s) = H(s)X(s)$ 일 때

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{4.3.5}$$

Transition matrix $\Phi(t) = e^{at}$ 이라 정의하면

$$x(t) = \Phi(t)\cdot x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)bu(\tau)d\tau \tag{4.3.6}$$

x, a, b, u 가 행렬일 경우 (확장해보자)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{bu}(\tau)d\tau \tag{4.3.7}$$

cf) State transition matrix: $\exp(At) = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^k}{k!}t^k$ (4.3.8)

< 표 4.1 Matrix와 vector의 일반적인 표기법notation>

표기	예시	설명	내용예
대문자 Bold	**A**, **B**, **C**	Matrix	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
소문자 Bold	**x**, **b**, **u**	Vector	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
소문자 Normal	d, e	Scalar constant	상수
소문자 Italic	*k*, *q*	Scalar variable	변수

■ 4.4 상태방정식으로부터 전달함수 구해내기

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{4.4.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{4.4.2}$$

각각의 Laplace tr. 을 취하면,

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \tag{4.4.3}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \tag{4.4.4}$$

(4.4.3)을 다시 정리하면

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \tag{4.4.5}$$

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s) \cdot \mathbf{B}U(s) \quad \text{where} \quad \Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{4.4.6}$$

식(4.4.6)을 식(4.4.4)에 대입하면

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}U(s) \tag{4.4.7}$$

$$\text{where} \quad \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = G(s) \tag{4.4.8}$$

Example)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{4.4.9}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{4.4.10}$$

$$\mathbf{c}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.11}$$

$$= \frac{1}{s(s+3)+2} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.12}$$

$$= \frac{6}{s(s+3)+2} \tag{4.4.13}$$

■ 4.5 상태천이행렬state transition matrix

직접 exponential을 통해서 구하는 방법과 라플라스 변환을 통한 방법, 두 가지 방법이 있다.

❶ exp. 활용

$$\Phi(t)=\exp(At)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots \tag{4.5.1}$$

❷ Laplace 역변환 활용

$\Phi(s)$ 를 구해서 라플라스 역변환 한다.

$$\Phi(s)=(sI-\mathbf{A})^{-1} \tag{4.5.2}$$

$$\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-\mathbf{A})^{-1}\} \tag{4.5.3}$$

∴ 상태천이 행렬을 구할 수 있으면, 컨볼루션convolution을 활용하여 시간영역에서의 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{x}(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{4.5.4}$$

■ 4.6 상태변수state variable 모델을 이용한 시간응답계산

이산 시간의 근사화와 미분의 기본정의 활용함

$$\dot{x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{4.6.1}$$

충분히 작은 $\Delta t=T$ 에 대하여

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{x(t+T)-x(t)}{T} \tag{4.6.2}$$

$$\frac{x(t+T)-x(t)}{T}\cong \mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}u(t) \tag{4.6.3}$$

$$\mathbf{x}[t+T]\cong(T\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x}(t)+T\mathbf{B}u(t) \tag{4.6.4}$$

$t=kT$ (k=0,1,2,⋯) 라 놓으면

$$\therefore \mathbf{x}[(k+1)T]\cong(T\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x}(kT)+T\mathbf{B}u(kT) \tag{4.6.5}$$

Example (3.6) RLC 회로의 응답.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \tag{4.6.6}$$

T= 0.2로 잡으면 (가장 작은 시정수의 절반 이하)

$$\mathbf{x}(k+1) \cong (0.2\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + 0.2\mathbf{B}u(k) \tag{4.6.7}$$

$$\mathbf{x}(k+1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}u(k) \tag{4.6.8}$$

만약 $u(k)$ =0 이고, $x_1(0) = x_2(0) = 1$ 이면

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \tag{4.6.9}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{bmatrix} \tag{4.6.10}$$

< 표3.2 계산 결과표>

	0	T	2T	3T	⋯
x_1	1	0.6	0.36	0.216	⋯
x_2	1	0.6	0.36	0.312	⋯

■